

3 Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала, рефлексивность гильбертова пространства, некоторые соотношения для слабо сходящихся последовательностей

▽ (Рисса) If f — л.огр. функц-я, то $\exists! h \in H: f(x) = (x, h), \forall x \in H, \|h\| = \|f\|$

1) If $f = 0 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow$ очевидно

2) If $f \neq 0$, то по лемме, $\dim(\ker f)^\perp = 1, H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$, $\forall x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in \ker f, x_2 \in (\ker f)^\perp$

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2), x_2 \in (\ker f)^\perp$$

$$\dim(\ker f)^\perp = 1, (\ker f)^\perp = \{ \alpha e, \alpha \in \mathbb{C}, \|e\| = 1 \}, x_2 = (x, e)e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_2) = f((x, e)e) = (x, e)f(e) = (x, \underbrace{f(e)e}_h) = (x, h),$$

$$h = f(e) \cdot e \in H$$

$$\boxed{!} \quad \exists f(x) = (x, h) = (x, \tilde{h}) \Rightarrow (x, h - \tilde{h}) = 0, \forall x \in H. \quad \exists x = h - \tilde{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|h - \tilde{h}\| = 0 \Rightarrow h = \tilde{h}$$

$$\boxed{\|f\| = \|h\|} \quad |f(x)| = |(x, h)| \leq \|x\| \|h\| \Rightarrow \|f\| \leq \|h\|$$

$$\text{Берем } x = \frac{h}{\|h\|}, \|x\| = 1 \Rightarrow \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq |f(x_0)| = \left| \left(\frac{h}{\|h\|}, h \right) \right| = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \Rightarrow \|f\| = \|h\|$$

$$\text{Введем } Q: f \in H^* \xrightarrow{\in H} h \in H \Rightarrow h = Qf$$

Q — л.огр.

$$1) (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x, h_1) + (x, h_2) = (x, h_1 + h_2) = (x, Qf_1 + Qf_2) = (x, Q(f_1 + f_2)) \Rightarrow Q(f_1 + f_2) = Qf_1 + Qf_2$$

$$2) \overline{Qf}(x) = \overline{Q}(x, h) = (x, \overline{Q}h) = (x, \overline{Q}Qf) \Rightarrow Q(\overline{Qf}) = \overline{Q}Qf$$

$$\text{В } H^* \text{ можно ввести ск. пр. } (\cdot, \cdot)_*: \forall f, g \in H^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f, g)_* = (Qf, Qg)$$

$$\Rightarrow H^* \text{ — гильб. пр-во? Проверим его полноту по } \|\cdot\|_*$$

$$\|f_n - f_m\|_*^2 = (Q(f_n - f_m), Q(f_n - f_m)) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Qf_n = h \in H \rightarrow \text{полнота}$$

$f_n = Q^{-1}(Qf_n) \rightarrow Q^{-1}h \Rightarrow H^*$ — полное $\Rightarrow H^*$ — ин. пр-во

Лемма H — рефлекс. пр-во

▲ Перем $F(f)$ — ин. ор. функц-л над H^* , где H^* — ин. пр-во $\Rightarrow$ применим ∇ Рисса: $\exists g \in H^*: F(f) = (f, g)^* = (Qf, Qg) = f(Qg) \Rightarrow$ по опр., H — рефлекс. ■

★ Банах. пр-во X . В нем $x_n \xrightarrow{\text{сильно}} x$, if $\forall x^* \in X^* \Rightarrow x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$

★ ин. б. пр-во H . В нем $x_n \xrightarrow{\text{сильно}} x$, if $\forall f \in H^*: f(x_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow$ по ∇ Рисса $\exists h \in H: (x_n, h) \rightarrow (x, h) \Rightarrow x_n \xrightarrow{\text{сильно}} x \in H$, if $\forall h \in H \Rightarrow (x_n, h) \rightarrow (x, h)$

Св-ва слабо сходящихся

1) If $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ и $x_n \xrightarrow{\text{сильно}} x$, то $\|x_n - x\| \rightarrow 0$

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\rightarrow \|x\|^2} - 2 \operatorname{Re} \underbrace{(x_n, x)}_{\rightarrow \|x\|^2} + \|x\|^2 \rightarrow 0$$

2) If $x_n \xrightarrow{\text{сильно}} x$, то $\liminf \|x_n\| \geq \|x\|$

▲ а) $\|x\| = 0 \Rightarrow$ очевидно

б) $\|x\| \neq 0 \Rightarrow x_n \not\rightarrow x \Rightarrow |(x_n, x)| \rightarrow \|x\|^2$
 $\|x\|^2 \leftarrow |(x_n, x)| \leq \|x_n\| \|x\| \Rightarrow \liminf \|x_n\| \geq \|x\|$ ■